

10. Übung zurelementaren Stochastik

1	2	3	4	Σ
4	1,5	1,5	7	11/16
				$\Sigma \Sigma 146$

1a) Gesucht ist $P = b(19500, 120000; \frac{1}{6}) + b(19504, 120000; \frac{1}{6}) + \dots + b(21200, 120000; \frac{1}{6})$

Nach Satz von de Moivre-Laplace ist P approximierbar

durch die Standardnormalverteilung: $\alpha = 19500$, $\beta = 21200$
(Skript S. 111) $n = 120000$, $p = \frac{1}{6}$

$$x(\alpha - \frac{1}{2}) = \frac{19499.5 - 120000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} \approx -3,87685633$$

$$x(\beta + \frac{1}{2}) = \frac{21200.5 - 120000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} \approx 9,299033014 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(\alpha - \frac{1}{2})}^{x(\beta + \frac{1}{2})} e^{-t^2/2} dt \approx \Phi(9,299) - \Phi(-3,87685)$$

Tabelle
zu
Normalverteilung

$$= 1 - 0,00005$$

approximiert $\checkmark$

Taschenrechner:

$$= 0,99995 \quad \checkmark \text{ für}$$

Wahre Wert des Integrals: $P \approx 0,99994709$

Wahre Wert von P : $P \approx 0,9999496868$
(wobei fraglich ist wie genau der Taschenrechner ist)

2/2

1b) $P = 0,99$

$$\alpha = 20000 - k \quad \beta = 20000 + k$$

$$\Rightarrow x(\alpha - \frac{1}{2}) = \frac{20000 - k - 20000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} = -\frac{1}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} (k + \frac{1}{2})$$

$$x(\beta + \frac{1}{2}) = \frac{20000 + k - 20000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{20000 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} (k + \frac{1}{2}) \Rightarrow x(\alpha - \frac{1}{2}) = -x(\beta + \frac{1}{2})$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(\alpha - \frac{1}{2})}^{x(\beta + \frac{1}{2})} \underbrace{\exp(-t^2/2)}_{\text{symmetrisch zur Y-Achse}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x(\beta + \frac{1}{2})} \exp(-t^2/2) dt = 2(\Phi(\beta + \frac{1}{2}) - \Phi(0))$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{2} + \phi(0) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{20000 \cdot \frac{1}{6}}} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

In der Tabelle Nachlesen für welches x

$$\phi(x) = \frac{0,99}{2} + 0,5 = 0,995 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow x \approx 2,575 \quad \text{mit}$$

$$\Rightarrow 2,575 = \frac{1}{\sqrt{20000 \cdot \frac{1}{6}}} \left(k + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 331,9310$$

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{k = 332} \quad \checkmark$$

4/4

4a) $E(X) = 300$

Dichtefunktion: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
(zu x)

Erwartungswert: $E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{300}$

Gefragt: $P(X \leq 80) = \int_0^{80} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{80} \quad \checkmark$
 $= -e^{-\lambda \cdot 80} + 1 = \underline{0,2340717}$

Die Wahrscheinlichkeit ~~ist~~, innerhalb von 80 km eine Tankstelle zu erreichen, ist ^{etwa} ~~23,407%~~.

4b) X, Y unabhängig (Reifen 1, 2) und

Exponentialverteilt

$$E(X) = E(Y) = 1200$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1200}$$

(Das „Ableben“ eines Reifens tritt also nach durchschnittlich 1200 km ein.)

Das Fahrrad hat eine Panne, wenn mindestens ein Reifen kaputtgeht $\Rightarrow$ uns interessiert $\min\{X, Y\}$

Skript S. 125 Satz 8.4 $\Rightarrow \min\{X, Y\}$ exp. verteilt mit

$$\lambda_{XY} = \lambda + \lambda = 2\lambda = \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow P(\min\{X, Y\} \leq 50) = \int_0^{50} 2\lambda e^{-2\lambda x} dx = -e^{-2\lambda \cdot 50} + 1 = \frac{-e^{-1/6} + 1}{-e^{-1/12} + 1} \quad \checkmark$$

Wahrscheinlichkeit für Panne innerhalb von 50 km

$$P(\text{keine Panne in } 50 \text{ km}) = 1 - (-e^{-1/12} + 1) = e^{-1/12} = \underline{0,92004} \hat{=} 92\% \quad 4/4$$

3) $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt auf beschr. Intervallen. Es gelte
 $F(s+t) = F(s) \cdot F(t)$ und es existiere $A > 0$ mit $F(A) \neq 0$.

a) Zeige, dass $F(s) \neq 0$ für s bel. ($F(A) \neq 0$ gilt schon)

① $s \leq A$:

$$0 \neq F(A) = F(s+\tau) = F(s) \cdot F(\tau)$$

also $F(s) \neq 0$

② $s > A$:

$$\text{Es ist } 0 \neq [F(A)]^n = F(nA)$$

Wähle also $n \in \mathbb{N}$ groß genug und benutze wieder ①.

b)

$$F(s) = F\left(\frac{s}{2} + \frac{s}{2}\right) = \left[F\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2 \geq 0$$

wegen a) ist $F(s) > 0$

c) $\checkmark$ und weiter?

15/4

2)b) Dichte zu X: $f=1$ (auf $[0,1]$)

Dichte zu Y: $g(x) = e^{-x}$ (exp.-vert. zu $\lambda=1$)

Zusammenbringen durch Faltung (S.89)

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$= \int_0^x 1 \cdot e^{-(x-t)} dt$$

$$\underline{h(x)} = \left[e^{-x+t} \right]_0^x = \underline{1 - e^{-x}} \quad \checkmark$$

$$x \leq 1$$

$$x > 1?$$

$$1,5/4$$